INSPECTORATUL
SCOLAR JUDETEAN
MARAMURES

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 28 februarie 2015

Barem - Clasa a XI – a

1 a) Calcul direct $a=2, b=-1$ 2p

b) Se demonstrează prin inducţie că $A^n = nA-(n-1)I_3, \forall n \geq 1$ 4p

$\det(A^n - nA) = \det((1-n)I_3) = (1-n)^3 \neq 0, \forall n \geq 2$ 1p

2. a) Se obţine $2x_{n+1} = 3x_n + 5y_n, 2y_{n+1} = x_n + 3y_n, \forall n \geq 0$. 2p

Deoarece $y_n = \dfrac{2x_{n+1} - 3x_n}{5}$ și se înlocuiește în a doua relație si dupa calcule se obține concluzia.

Analog se demonstrează a doua relație...3p

b) Avem că $(x_0, y_0) = (1,1), (x_1, y_1) = (4,2)$

perechi care verifică ecuația $x^2 - 5y^2 = -4$ 1p

Se demonstrează prin inducție că perechile $(x_n, y_n), n \geq 0$ sunt soluții si că șirurile sunt strict crescătoare și cu elemente din $\mathbb{N}$ 1p

3 a) Deoarece $B + xA \in M_3(\mathbb{Q})$ atunci $\det(B + xA)$ este o funcție de grad cel mult trei în x cu coeficienți raționali...1p

Deci $\exists a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ astfel încât $f(x) \stackrel{not}{=} \det(B + xA) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

unde $a = \det(A) = 1$ și $d = \det(B)$ 2p

b) $\det(B + \sqrt{2}A) = f(\sqrt{2}) = 2b + d + \sqrt{2}(2 + c) = 0 \Rightarrow c = -2, d = -2b$ 2p

INSPECTORATUL
SCOLAR JUDETEAN
MARAMURES

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Atunci $f(x)=x^3+bx^2-2x-2b=(x^2-2)(x+b)\Rightarrow f(-b)=0$ deci $x_0=-b\in\mathbb{Q}$ ..2p

4) a) Prin inducție se demonstrează că $x_n>0,\forall n\geq 1$ și

$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{x_n}>0,\forall n\geq 1$ deci șirul este strict crescător……………………….1p

Presupunem că șirul este mărginit superior atunci el este convergent

Atunci $\exists \ell\in\mathbb{R}$ astfel încât $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ și trecând la limită în relația de recurență se obține

$\ell=\dfrac{\ell^2+1}{\ell}\Rightarrow 0=1(F)$ deoarece $x_n>1,\forall n\geq 1$ și x_n e strict crescător. Prin urmare șirul este nemărginit superior și strict crescător adică are limita $+\infty$, deci divergent…………2p

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2+1}{x_n^2}=1$ ………………………………………….1p

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n\overset{1^\infty}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n^2+1}{x_n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x_n^2}\right)^{x_n^2}\right]^{\frac{n}{x_n^2}}=e^{\ell}\text{,unde}$$

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\overset{LSC}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{x_{n+1}^2-x_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{2x_n^2+1}=\frac{1}{2}$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\sqrt{e}$ …………………………………………….3p